

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κατασκευή: Το μονόχορδο του Πυθαγόρα

2005-2006

Τόλιας Γιάννης
Α1΄Λ

Υπεύθυνη Καθηγήτρια:
Α. Τσαγκογέωργα



Περιεχόμενα:

- **Τίτλος Εργασίας**
- **Σκοπός**
- **Υπόθεση (Περιγραφή Κατασκευής)**
- **Ορισμός Μεταβλητών**
- **Υλικά**
- **Ανάλυση αποτελεσμάτων**
- **Ιστορικά Στοιχεία**
 - Πυθαγόρας
 - Το Λάθος των Πυθαγορείων
- **Βιβλιογραφία**

Μονόχορδο Του Πυθαγόρα

(κατασκευή μονόχορδου με
απλά υλικά)



Μαθηματικά και Μουσική

Σκοπός Εργασίας:

Μελέτη της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στα μαθηματικά και τη μουσική.

Τα μαθηματικά και η μουσική είναι δυο επιστήμες που έχουν πολύ μεγάλη σχέση μεταξύ τους.

Από την αρχαιότητα ακόμη οι δύο τέχνες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και η αλληλεπίδραση αυτή φτάνει ως τις μέρες μας...

Η ιδέα της σύνδεσης των μαθηματικών και της μουσικής γεννήθηκε πριν από 26 ολόκληρους αιώνες στην αρχαία Ελλάδα από τον Πυθαγόρα, μαθηματικό και ιδρυτή της πυθαγόρειας σχολής σκέψης. Ο φιλόσοφος γνώριζε πολύ καλά τη σχέση της μουσικής με τους αριθμούς. Οι ειδικοί ερευνητές θεωρούν ότι το πιθανότερο είναι πως ο ίδιος και οι μαθητές του εντρυφήσαν στη σχέση της μουσικής και των αριθμών μελετώντας το αρχαίο όργανο μονόχορδο.

Όπως φαίνεται από το όνομά του, το μονόχορδο ήταν ένα όργανο με μία χορδή και ένα κινητό καβαλάρι που διαιρούσε τη χορδή επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται. που από αρκετούς μελετητές τοποθετείται στην οικογένεια του λαούτου δηλαδή με βραχίονα, χέρι. Το μονόχορδο χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό των μαθηματικών σχέσεων των μουσικών ήχων. Ονομάζονταν και "Πυθαγόρειος κανών" γιατί απέδιδαν την εφεύρεσή του στον Πυθαγόρα. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί εργάστηκαν για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα, όπως ο Αρχύτας (εργάστηκε στις αναλογίες των διαστημάτων του τετραχόρδου στα τρία γένη, διατονικό, χρωματικό και εναρμόνιο και ανακάλυψε το λόγο της μεγάλης τρίτης στο εναρμόνιο γένος), ο Ερατοσθένης ο Δίδυμος (σ' αυτόν αποδίδεται ο καθορισμός του "κόμματος του Διδύμου", που είναι η διαφορά μεταξύ του μείζονος τόνου (9/8) και του ελάσσονος (10/9) δηλαδή 81/80).

Πιο συγκεκριμένα η κατασκευή του μονόχορδου επάνω στο οποίο εργάζονταν οι Πυθαγόρειοι με σύγχρονα και απλά μέσα θα μας προσφέρει τη δυνατότητα να ερευνήσουμε τη σχέση του μήκους της χορδής (ενός έγχορδου) με τον ήχο τον οποίο αυτή παράγει.

Υπόθεση (Περιγραφή κατασκευής):

- 1.** Με τη σέγα κόβουμε 2 κομμάτια μολύβι σε μήκος 3 εκ. που τα χρησιμοποιούμε σαν καβαλάρηδες και τα κολλάμε έτσι ώστε να απέχουν μεταξύ τους 48 εκ. .Στη μέση τους ανοίγουμε με τη σέγα ένα μικρό αυλάκι απ' όπου στη συνέχεια θα διέρχεται η χορδή.
- 2.** Βιδώνουμε τις βιδοθηλιές στα άκρα του ξύλου
- 3.** Σημαδεύουμε πάνω στο ξύλο τις γραμμές που μας δίνουν την κλίμακα του Πυθαγόρα με το ένα χρώμα και με το άλλο τις γραμμές της συγκερασμένης (δυτικοευρωπαϊκής) μείζονος κλίμακας. Μετά τεντώνουμε τη χορδή.

Ορισμός Μεταβλητών:

Η μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα κατασκευάζεται με βάση τις αναλογίες του κύβου, ο οποίος εκφράζεται με τον αριθμό 4 της 5ης τετρακτύος (1 = τετράεδρο, 2 = οκτάεδρο, 3 = εικοσάεδρο, 4 = κύβος) και συμβολίζει τη γη και το συνδυασμό των στοιχείων της. Ο κύβος έχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές. Οι αριθμοί 12 και 6 δίνουν την αναλογία 2/1, οι 8 και 6 την αναλογία 4/3 ενώ οι 12 και 8 την αναλογία 3/2. Επίσης ο αριθμός 8 είναι το αρμονικό μέσο των 6 και 12, ενώ το αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών είναι ο 9. Ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος δίνουν την αναλογία 9/8. Έτσι προκύπτουν οι μαθηματικές αναλογίες βάση των οποίων κατασκευάζεται η μουσική κλίμακα κατά τους Πυθαγόρειους. Οι αναλογίες αυτές αποδείχθηκαν και στην πράξη από τα πειράματα που έκανε ο Πυθαγόρας πάνω στο μονόχορδο το οποίο διαίρεσε σε 12 ίσα τμήματα (όσες και οι ακμές του κύβου).

Με τη χορδή «ανοιχτή» δηλαδή σε θέση να μπορεί να ταλαντώνεται όλο το μήκος της (λόγος 1, συχνότητα 1), έκρουσε και άκουσε ένα μουσικό τόνο. Στη συνέχεια περιόρισε το μέρος της χορδής που ταλαντώνεται στο μισό της μήκος, και βρήκε ότι ο ήχος που ακούστηκε είναι η διαπασών, αυτό που σήμερα ονομάζουμε οκτάβα. Το ύψος λοιπόν του ήχου επηρεάζεται από το μήκος της χορδής και μάλιστα όταν η αναλογία του μήκους είναι 1/2 (συχνότητα 2/1) έχουμε το διάστημα της οκτάβας. Έτσι ορίστηκαν τα άκρα της μουσικής κλίμακας, η υπάτη και η νήτη. Στη συνέχεια μετακινώντας τον καβαλάρη σε διάφορα σημεία, βρήκε ότι αν ταλαντωνόταν τα 3/4 της χορδής (συχνότητα 4/3) προέκυπτε ο τέταρτος φθόγγος από τους οκτώ μιας μουσικής κλίμακας, η μέση, ενώ αν ταλαντωνόταν τα 2/3 της χορδής (συχνότητα 3/2) προέκυπτε ο πέμπτος φθόγγος, η παραμέση. Οι υπόλοιποι φθόγγοι της κλίμακας κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας το λόγο 9/8 ως εξής:

- Ο δεύτερος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πρώτου (υπάτη) αν τον πολλαπλασιάσουμε με 9/8: $1 \times 9/8 = 9/8$ δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα 8/9 της χορδής.
- Ο τρίτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του δεύτερου (9/8) αν και πάλι πολλαπλασιαστεί με 9/8: $9/8 \times 9/8 = 81/64$ δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 64/81 της χορδής.
- Ο έκτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πέμπτου (παραμέση) που πολλαπλασιάζεται με 9/8: $1:2/3 \times 9/8 = 27/16$ δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 16/27 της χορδής.
- Τέλος, ο έβδομος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του έκτου και πάλι πολλαπλασιάζομενου με 9/8: $1:16/27 \times 9/8 = 243/128$ δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα 128/243 της χορδής.

Υλικά:

- Ένα ξύλο με διαστάσεις 55x3x2 εκ.
- Ένα μολύβι
- Πετονιά
- Σέγα, Χάρακα
- 2 στυλό διαφορετικού χρώματος
- 2 μικρές βιδοθηλιές
- Κόλλα λευκή
- Ψηφιακή φωτογραφική μηχανή

Ανάλυση αποτελεσμάτων:

Πέρα από το μονόχορδο, ο Πυθαγόρας πειραματίστηκε και με άλλα υλικά και τις ιδιότητές τους που συνθέτουν τα μουσικά διαστήματα, όπως η τάση χορδών ίσου μήκους και πάχους, το μήκος ηχητικού σωλήνα κ.τ.λ. Ο χωρισμός και καθορισμός των μουσικών διαστημάτων που πέτυχε, ήταν ένα τεράστιας σημασίας επίτευγμα τόσο για τη μουσική και τη θεωρία της όσο και για τα μαθηματικά και τη δύναμή τους να ερμηνεύουν τον κόσμο με αριθμούς όπως εξάλλου δίδασκε και ο Πυθαγόρας. Πέρα από τη μεγάλη σημασία για τη θεωρία της μουσικής, ο υπολογισμός του έδωσε την ευκαιρία να κατασκευαστούν μουσικά όργανα με μεγαλύτερη ακρίβεια από πριν. Με το πέρασμα του χρόνου, η Πυθαγόρεια μουσική κλίμακα τροποποιήθηκε είτε για πρακτικούς είτε για καθαρά φιλοσοφικούς λόγους, όμως ο Πυθαγόρας είχε δείξει έναν δρόμο που και οι σύγχρονες μουσικές κλίμακες ακολουθούν. Ακόμα και σήμερα υπολογίζουμε μαθηματικά τα μουσικά διαστήματα τα οποία βέβαια έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά από τότε.

Χρειάστηκε να περάσουν αιώνες για να προστεθούν τα μουσικά διαστήματα της 3ης και 6ης και η "ήπια" (συγκερασμένη) κλίμακα του Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ να "ξεκλειδώσει" με την σύνθεση Καλοσυγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο τους νέους ατραπούς που ακολουθήσαν οι επόμενοι μεγάλοι "Κλασικοί". Από την Α-Β-Γ-Δ-Ε-Ζ-Η των αρχαίων Ελλήνων και την ΠΑ-ΒΟΥ-ΓΑ-ΔΗ-ΚΕ-ΖΩ-ΝΗ των Βυζαντινών, στην ΝΤΟ-ΡΕ-ΜΙ-ΦΑ-ΣΟΛ-ΛΑ-ΣΙ-ΝΤΟ των Δυτικών.

Στη σημερινή πραγματικότητα, τόσο η μουσική θεωρία, όσο και η μουσική πράξη, ερμηνεύονται με φυσικούς νόμους, που με τη σειρά τους διατυπώνονται με μαθηματικές σχέσεις.

Στην ακουστική (στον ιδιαίτερο κλάδο της φυσικής που έχει ως αντικείμενο τον ήχο και τις ιδιότητές του) ένα μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν ο λόγος δύο συχνοτήτων. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο λόγος είναι απλής μορφής όπως για παράδειγμα οι γνωστοί μας λόγοι της καθαρής πέμπτης (3/2), της καθαρής τετάρτης (4/3), της οκτάβας (2/1) κ.λ.π. Σε άλλες περιπτώσεις, ελλείπει μεγίστου κοινού διαιρέτη, οι όροι του λόγου είναι μεγάλοι αριθμοί όπως στο διάσχιμα (2048/2025). Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη, η σύγκριση δύο μουσικών διαστημάτων.

Η απλούστευση στην παράσταση των μουσικών διαστημάτων επήλθε με τη βοήθεια της λογαριθμικής σχέσης

$$\text{μέγεθος μουσικού διαστήματος} = k * \log(f_2/f_1)/\log 2$$

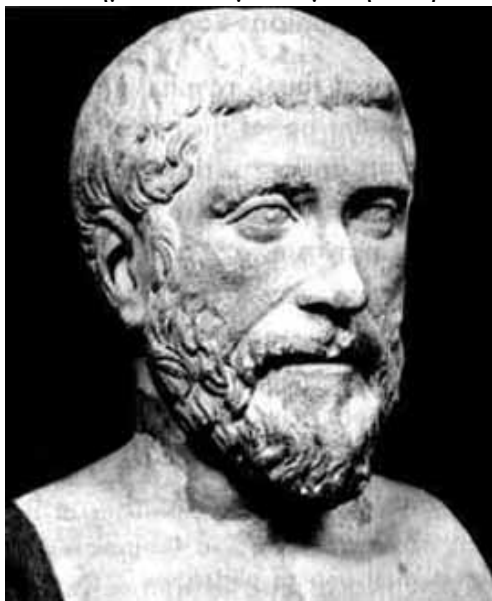
στην παραπάνω σχέση, όπου f_1 , f_2 οι συχνότητες των φθόγγων του μουσικού διαστήματος και $f_2 > f_1$. Το k είναι μια σταθερά η τιμή της οποίας καθορίζει και ένα σύστημα μονάδων μουσικών διαστημάτων.

Τελικά με την σημερινή έρευνα καταφέρνουμε να συγκρίνουμε τις 2 βασικές κλίμακες που υπάρχουν ως τώρα (αυτή του Πυθαγόρα με την τωρινή συγκερασμένη). Μπορούμε να κάνουμε τη σύγκριση αυτή χρησιμοποιώντας ένα σύγχρονο μουσικό όργανο όπως π.χ. μία κιθάρα ή συγκρίνοντας τις 2 κλίμακες στη δική μας κατασκευή (όπου είναι και οι 2 σχεδιασμένες).

Ιστορικά στοιχεία:

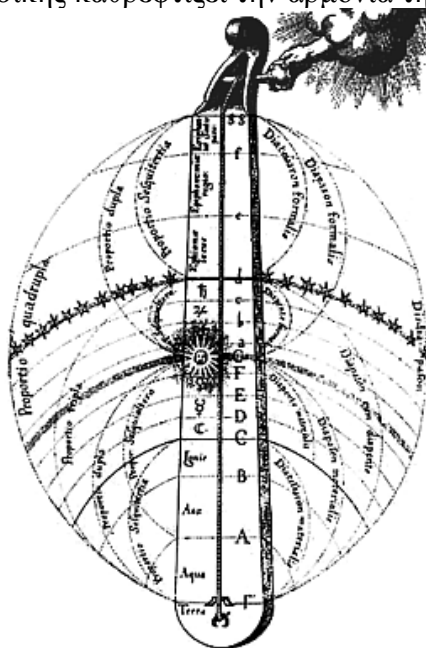
Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ Η ΔΙΠΛΗ ΤΟΥ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Ο **Πυθαγόρας** (572 - 500 π.Χ.) ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός και θεωρητικός της μουσικής. Υπήρξε ο πρώτος που έθεσε τις βάσεις της επιστήμης της μουσικής με μια επιστημονικά θεμελιωμένη θεωρία της μουσικής. Ίδρυσε σχολή γύρω στο 532 π.Χ.



όπου δίδασκε ότι ο κόσμος πρέπει να ερμηνεύεται με αριθμούς. Ανακάλυψε τη σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και το τονικό ύψος που δίνουν. Με υπολογισμούς καθαρά μαθηματικούς βρήκε τις αριθμητικές αναλογίες των μουσικών διαστημάτων της όγδοης (οκτάβας) της τέταρτης ($4/3$), της πέμπτης ($3/2$) καθώς και του μείζονα τόνου, τη διαφορά δηλαδή ανάμεσα στην τέταρτη και την πέμπτη ($9/8$). Για τους Πυθαγόρειους διάστημα είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του (ακραία σημεία) σχηματίζουν αριθμητική σχέση (αναλογία αριθμών). Οι όροι διάστημα και λόγος είναι ταυτόσημοι. Σε κάθε διάστημα επομένως υπάρχουν πάντα δύο αριθμοί.

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του υποστήριζε επίσης την άποψη ότι από την περιστροφή των πλανητών παράγονται ήχοι, ανάλογα με την απόστασή τους από τη γη, οι οποίοι όμως δεν ακούγονται. Το σύνολο των ήχων αυτών δίνει την «**αρμονία των σφαιρών**». Την αρμονία των σφαιρών οι Πυθαγόρειοι τη συνδύασαν και με την αρμονία της ψυχής. Οι φιλοσοφικές αντιλήψεις τους επηρέασαν τον Πλάτωνα ο οποίος αργότερα θεωρεί ότι η αρμονία της μουσικής καθρεφτίζει την αρμονία της ψυχής.



ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

Ήταν εντυπωσιακό το γεγονός ότι μόνο οι ακριβείς μαθηματικές σχέσεις έδιναν αρμονικούς ήχους στο μονόχορδο. Για παράδειγμα, έπρεπε να χωρίσουν ακριβώς στη μέση τη χορδή, και όχι περίπου στη μέση, ώστε να έχουν το ευχάριστο ψυχικό συναίσθημα που απορρέει από έναν αρμονικό ήχο. Εύκολα λοιπόν οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά κυβερνούν τη μουσική ή και ότι, ως ένα βαθμό, η μουσική κυβερνά τα μαθηματικά. Για τους Πυθαγορείους, αυτή η άμεση και ακριβής σχέση μαθηματικών, μουσικής και ευχάριστου ψυχικού συναισθήματος αποτελούσε τη μέγιστη απόδειξη ότι η αλήθεια, στο ύψιστο επίπεδό της, εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις. Πίστευαν, μάλιστα, ότι η ψυχή, μέσα από τα μαθηματικά και τη μουσική, μπορούσε να εξυψωθεί ώσπου να ενωθεί με το σύμπαν και ότι ορισμένα μαθηματικά σύμβολα έχουν αποκρυφιστική σημασία. Η εμμονή των Πυθαγορείων στους ρητούς αριθμούς - είναι οι ακέραιοι αριθμοί, καθώς και οι αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν με κλάσματα- ήταν εκείνη που περιόρισε τους ορίζοντές τους και τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι δομημένος με βάση την τέλεια αρμονία των πάντων. Ωστόσο, στις αρχές της αρμονίας των Πυθαγορείων βασίστηκε η ευρωπαϊκή μουσική μέχρι, τουλάχιστον, τη στιγμή που ο Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ, μέσω της σύνθεσής του "*Καλοσυγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο*" πρότεινε την υποδιαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ημιτόνια - κάτι, παρεμπιπτόντως, που είχε προτείνει δύο χιλιάδες χρόνια πριν από τον Μπαχ ο Αριστόξενος, όμως δεν εισακούστηκε.

Συμπερασματικά, παρά τον ηθικοθηρησκευτικό χαρακτήρα της διδασκαλίας του, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του διαμόρφωσαν φιλοσοφικές αρχές που επηρέασαν την πλατωνική και αριστοτελική διάνοηση, κυρίως όμως συνέβαλαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών, της μουσικής και της δυτικής φιλοσοφίας. Καθιέρωσαν την αντίληψη ότι η πραγματικότητα - συμπεριλαμβανομένης της μουσικής και της αστρονομίας- είναι στο βαθύτερο επίπεδό της μαθηματικής φύσης. Μας κληροδότησαν επίσης το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τη χρήση της φιλοσοφίας ως μέσου πνευματικής κάθαρσης, την ιδέα περί ουράνιου πεπρωμένου της ψυχής και της δυνατότητας ανύψωσής της σε ένωση με το θεϊκό στοιχείο του κόσμου. Πυθαγόρεια είναι και η προσφυγή σε εντυπωσιακά σύμβολα με μυστικιστικές ιδιότητες, όπως η τετρακτύς, η χρυσή τομή και η αρμονία των σφαιρών.

Βιβλιογραφία από το Internet:

- Ελληνική ιστοσελίδα για τη Βυζαντινή μουσική
- Περιοδικό Focus
- Πανελλήνιο Σχολικό δίκτυο
- <http://www.kastar.gr/index.html>

Βιβλίο:

- «Το εργαστήριο της μουσικής» (Π. Καμπύλης, Ι. Σπετσιώτης)

Φωτογραφίες Εργασίας:

